



MARZO,
MES DE LAS
MATEMÁTICAS

Juegos y Matemáticas

Cuadrados Grecolatinos: Un reto que parece un juego; un juego para resolver retos.

Texto **Guido Ramellini**

Aplicaciones interactivas **Rafael Losada Liste y José Muñoz Santonja**

“El juego es la forma más elevada de
investigación”

Albert Einstein



GOBIERNO
DE ESPAÑA

MINISTERIO
DE CIENCIA
E INNOVACIÓN



FUNDACIÓN ESPAÑOLA
PARA LA CIENCIA
Y LA TECNOLOGÍA

“El juego y la belleza están en el origen de una gran parte de las matemáticas. Si los matemáticos de todos los tiempos se lo han pasado tan bien jugando y contemplando su juego y su ciencia, ¿por qué no tratar de aprenderla y comunicarla a través del juego y de la belleza?” Miguel de Guzmán

Cuadrados latinos y grecolatinos

En los últimos años de su vida, Leonhard Euler (1707-1783) escribió una voluminosa memoria acerca de un tipo de cuadrados mágicos: *los cuadrados latinos*.

Su característica es que no se repite el mismo símbolo en ninguna de las filas o columnas. ¡Exacto!, como en los Sudokus, que son cuadrados latinos 9 x 9 especiales, ya que se pueden descomponer en 9 cuadrados diferenciados de dimensión 3 x 3. ¿Y si eso nos ayudara a resolver los retos?

Si superponemos dos cuadrados latinos ortogonales, usando otros símbolos, para no confundirlos, se consigue un nuevo cuadrado, con las mismas características de los anteriores y en cuyas casillas no se repite nunca la misma combinación de símbolos. Es un cuadrado grecolatino

3	4	2	1
4	3	1	2
2	1	3	4
1	2	4	3

Cuadrado 4 x 4 resuelto repitiendo las diagonales. Cuadrados latinos ortogonales: los elementos homólogos respectivos no se repiten.

Reto 1: ¿Sabrías construir el cuadrado sin repetir color y número en las diagonales?



La hipótesis de Euler

Euler demostró que no hay cuadrados grecolatinos de orden 2; y construyó sin problemas cuadrados de orden 3, 4 y 5. ¿pero qué decir de los cuadrados de orden 6? Euler afrontó el problema imaginando 36 soldados, con 6 distintos grados y de 6 regimientos diferentes.

Pero Euler se equivocó en parte. En 1959, E. T. Parker, R. C. Bose y S. S. Shrikhande presentaron un método para construir infinitos cuadrados grecolatinos de orden 10 o mayor, rebatiendo la hipótesis del gran Euler. Sólo el de orden 6 es imposible.

En 1960 Parker diseñó un programa informático que permitía en menos de 45 minutos hacer cuadrados de orden 10 ortogonales a cualquier cuadrado dado.

Los cuadrados grecolatinos en la literatura

Georges Perec (1936-1982) publicó su novela *La vida instrucciones de uso* en 1978. Una de las fuentes inspiradoras fue el dibujo que Saul Steinberg hizo en 1949 para *The Art of Living*.

638 páginas, 99 capítulos para componer 6 partes nos conducen, sin pasar dos veces por el mismo sitio, a conocer ambientes, personajes, vidas, pasiones, manías de los inquilinos del edificio situado al nº 11 de la calle Crubellier, simulando un enorme tablero de 10 x 10 huecos, recorrido con un itinerario marcado por el salto del caballo.

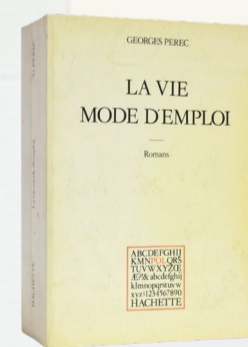
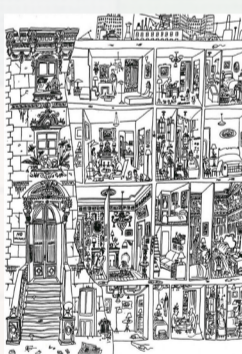
El desarrollo de la novela sigue varios procesos matemáticos formales:

- movimientos del caballo de ajedrez adaptada a un tablero de 10 x 10
- pseudo-queenina de orden 10
- bicuadrado latino ortogonal de orden 10
- teoría de grafos y recorrido Hamiltoniano

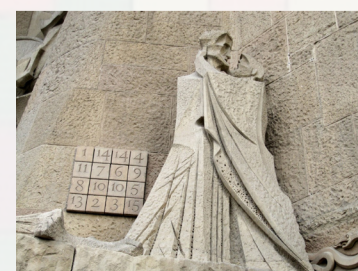
Los cuadrados mágicos en las artes plásticas

Conocidos ya en la antigüedad, se les atribuyeron propiedades mágicas. El de Durero, tiene muchas más curiosidades que la simple repetición de la constante en cada fila, columna y diagonal. Se pueden encontrar hasta 52 formas distintas de sumar 34, sin contar las que se obtienen por simetría o permutaciones, de las ¡384 posibles!

En la fachada de la Sagrada Familia de Barcelona, Subirachs imitando a Durero introduce un cuadrado mágico, pero la suma no es 34 sino 33, la edad de Cristo. Para ello tuvo que repetir algunos números y suprimir otros.



Alberto Durero, *Melancolía I*, 1514



“Yo no dudo en concluir que es imposible hallar un cuadrado completo de 36 casillas ni en hacer extensiva tal imposibilidad a los casos $n = 10$, $n = 14$ y, en general a todos los órdenes pares de clase impar (no divisibles por 4). Interrumpo aquí mis investigaciones sobre la cuestión, que aunque de escasa utilidad por sí misma, nos ha conducido a importantes observaciones en la teoría combinatoria y en la teoría general de los cuadrados mágicos”. L. Euler

Reto 2: construir un cuadrado grecolatino por superposición de 2 cuadrados latinos ortogonales.



Contrariamente a lo que pensaba Euler los cuadrados grecolatinos han revelado su gran utilidad en distintos campos científicos y tecnológicos.

Ronald Aylmer Fisher (1890-1962), biólogo, estadístico, matemático y astrónomo es un personaje destacado en estas aplicaciones.

Trabajando en una estación agrícola experimental, elaboró un análisis de la varianza (T de Student) que permitió el desarrollo de la biometría o estadística médica. Descubrió así la utilidad de los cuadrados grecolatinos para programar experimentos y atenuar las alteraciones ambientales en las investigaciones.

El diseño experimental factorial

Es una técnica estadística que permite identificar y cuantificar las causas de un efecto dentro de un estudio experimental en el que intervienen varias variables independientes.

Prescribe qué variables hay que manipular, de qué manera, cuántas veces hay que repetir el experimento y en qué orden para poder establecer con un grado de confianza predefinido la existencia de una relación de causa-efecto.

La aplicación de los cuadrados grecolatinos al diseño de experimentos juega un papel básico en la mitigación de los elementos perturbadores.

El diseño experimental encuentra aplicaciones en la industria, la agricultura, la mercadotecnia, la medicina, la ecología, las ciencias de la conducta.

Cultivo experimental
 Programación de los ensayos para analizar el desgaste de tejidos:
 A - D = tratamientos; 1 - 4 telas;
 $\alpha - \delta$ = agente desgastante

Ensayo	P ₁	P ₂	P ₃	P ₄
R ₁	α A1	β B2	γ C3	δ D4
R ₂	β C4	α D3	δ A2	γ B1
R ₃	γ D2	δ C1	α B4	β A3
R ₄	δ B3	γ A4	β D1	α C2

Fuentes citadas:

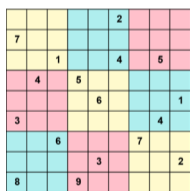
- M. Gardner, *Nuevos pasatiempos matemáticos*, Alianza Editorial (1972)
- M. Macho, *La vida instrucciones de uso*, de Georges Perec, Divulgamat (10/2010)

Reto 3: construir un cuadrado grecolatino de 5x5.

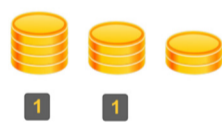


¡A jugar! Juegos relacionados con el cuadrado grecolatino

SUDOKU - CUADRADO LATINO 9x9



GRUNDY'S GAME



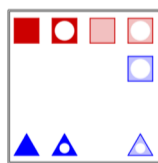
RASCACIELOS



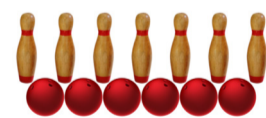
NIM / NIM CIRCULAR



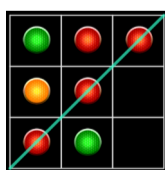
QUARTO



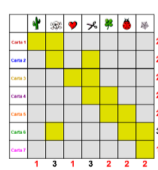
KAYLES



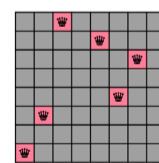
SEMÁFOROS



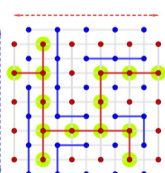
LITTLE DOBBLE



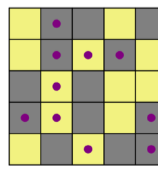
LAS 8 DAMAS



BRIDG-IT / LA SIMETRÍA DEL BRIDG-IT



LIGHTS OUT



SIM

