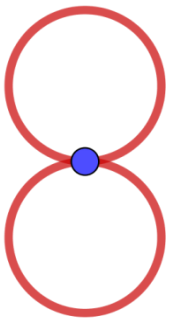
MARZO,
MES DE LAS
MATEMÁTICAS

LA TELA DE ARAÑA

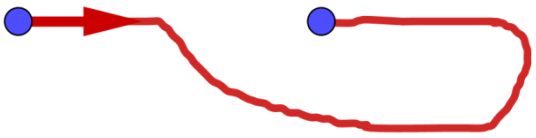
La tela de araña

Un cronopio pequeñito buscaba la llave de la puerta de la calle en la mesa de la luz en el dormitorio, el dormitorio en la casa, la casa en la calle. Aquí se detenía el cronopio, pues para salir a la calle precisaba de la llave de la puerta.

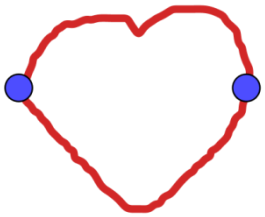
Julio Cortázar



Grafo egocéntrico



Grafo traidor

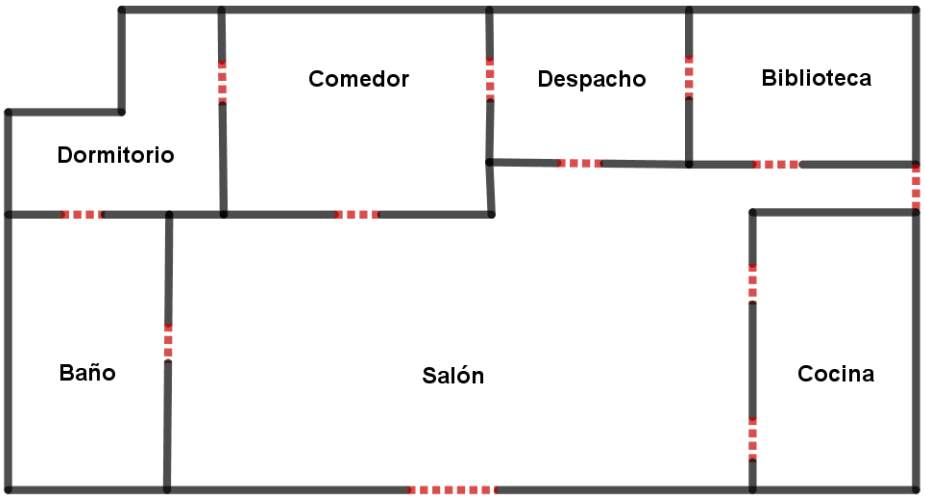


Grafo enamorado

En muchos casos, la matemática se han convertido en una materia árida debido a cierta inercia a confundir rigor y formalismo, pensamiento lúdico y vanalidad, imaginación y falta de método, humor y payasada. Para alcanzar la libertad es necesario (aunque no suficiente) romper muchas cadenas.

Actividad 1. El castillo de las doce puertas

El siguiente dibujo representa, en esquema, las distintas habitaciones de la planta baja de un castillo:

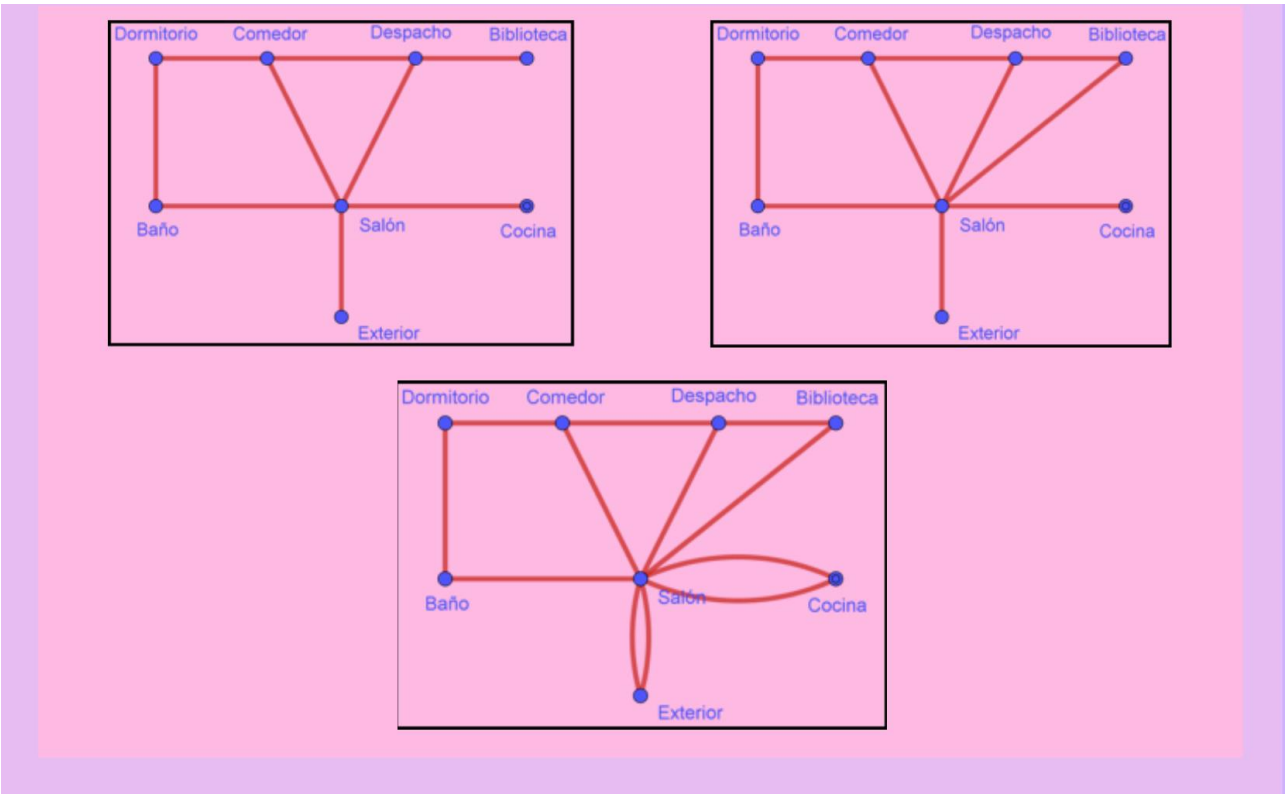


1. Si te encontrases en el comedor, ¿podrías pasear por todas las habitaciones, sin salir del castillo, pasando por todas las puertas una sola vez? ¿Y si te encontrases en el salón? (Ayúdate de un lápiz y una goma de borrar).

2. ¿Habrá alguna habitación de la que puedas partir para pasar una sola vez por todas las puertas del castillo, incluyendo las del exterior?

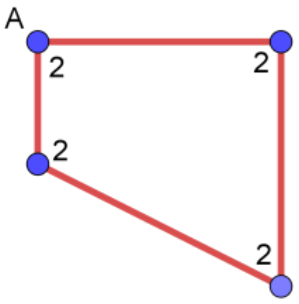
Podemos representar cada habitación por un punto y cada puerta por una línea. Así, dos habitaciones comunicadas por una puerta se convierten en dos puntos unidos por una arista.

De los siguientes esquemas, ¿cuál te parece que se corresponde con el castillo?



Actividad 2. Paseos con retorno, sin retorno e imposibles

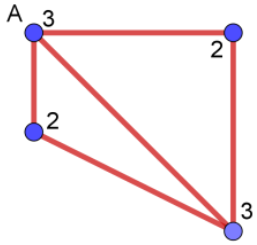
Imagina que sales de un punto A. Puede ser que puedas recorrer todo el circuito (una sola vez) y acabar de nuevo en A. Por ejemplo:



(Paseo con retorno o **ciclo**)

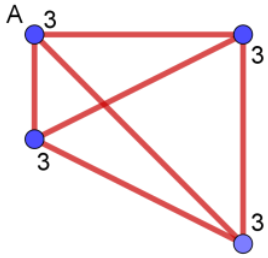
Al lado de cada punto (vértice) aparece el número de aristas (grado) que concurren en él.

O puede ser que puedas recorrer todas las aristas pero ya no puedas volver a A, si no que acabes en otro vértice. Por ejemplo:



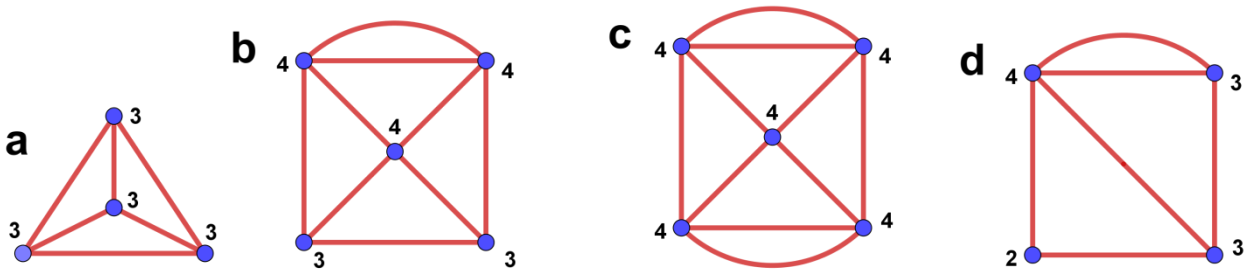
(Paseo sin retorno o **camino**)

Y tal vez ni siquiera puedas completar el esquema gráfico **(grafo)**. Ejemplo:



(Paseo imposible, desde cualquier vértice)

Investiga cuáles de los siguientes paseos son con retorno, sin retorno o imposibles (para cualquier vértice de salida), y completa la tabla según vas obteniendo resultados:



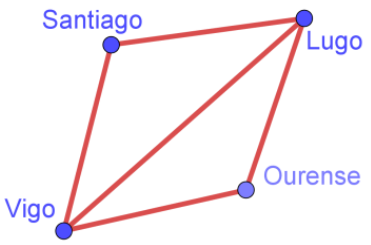
	Nº de vértices de grado impar	Tipo de paseo (con o sin retorno, o imposible)
a		
b		
c		
d		

¿Qué ley puedes emplear para saber, solo contando, de qué tipo es un paseo?

MARZO,
MES DE LAS
MATEMÁTICAS

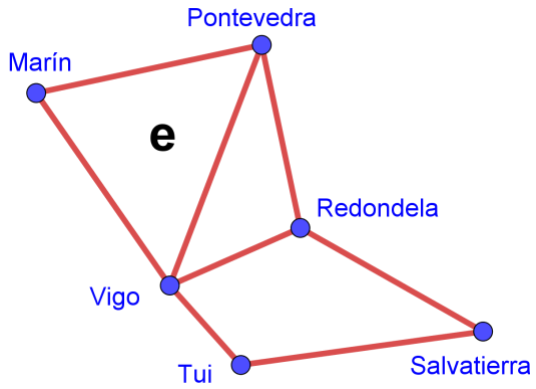
Actividad 3. En la carretera

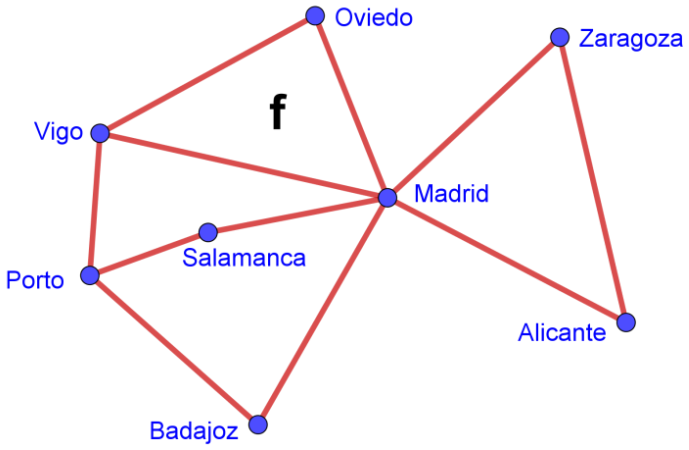
Recorre todas las carreteras de cada mapa, sin pasar dos veces por la misma, indicando el orden que sigues con las iniciales de las ciudades por donde vas pasando (incluida la de partida). Ejemplo:

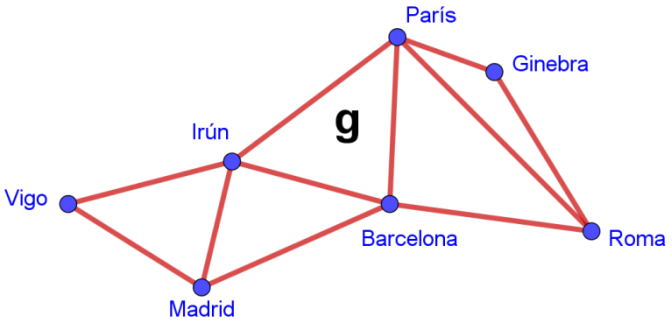


Un recorrido posible es: **L V O L S V**

Recuerda que si primero observas cuántos caminos concurren en cada vértice (es decir, el grado del vértice) te será más fácil saber de dónde tienes que partir y a dónde llegar.





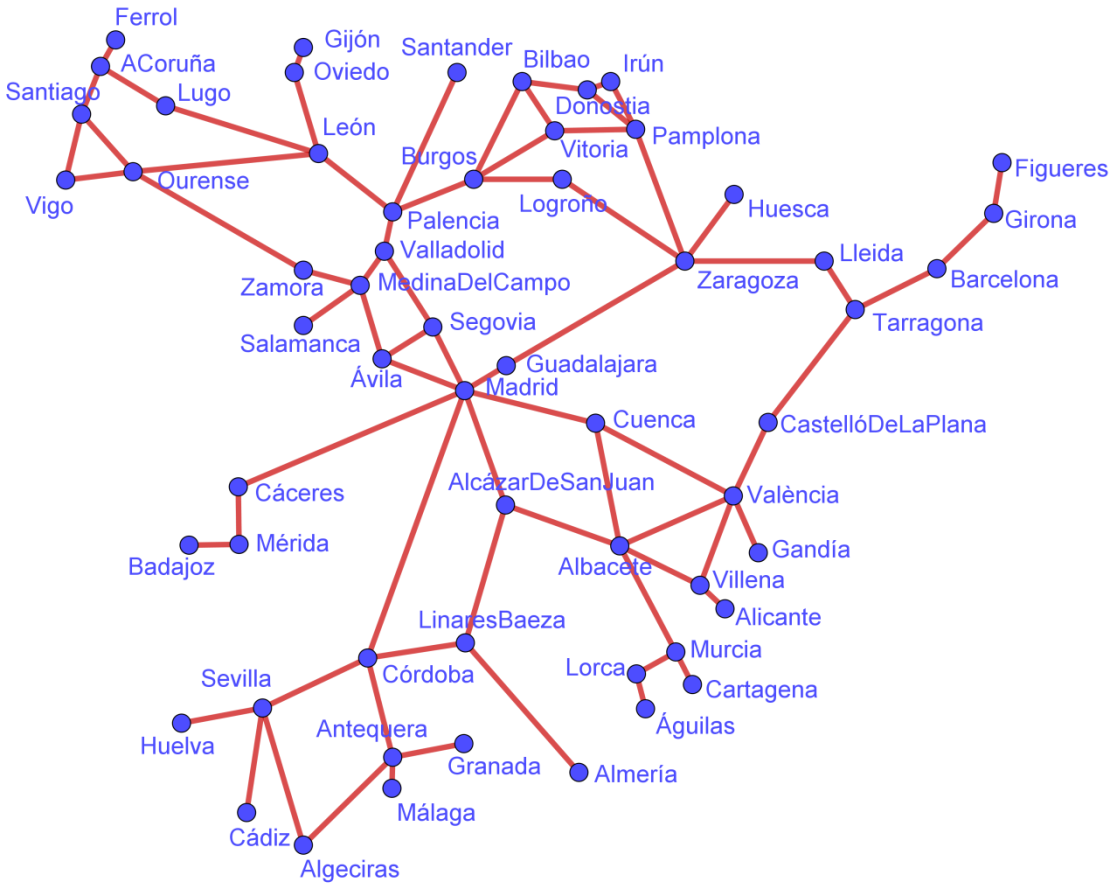


	Recorrido
e	
f	
g	

Trabajo complementario a las actividades 1, 2 y 3

1. Construye el paseo con retorno que tú mismo has realizado, desde que saliste de tu casa hasta que volviste a ella, el día de ayer. Cada vértice es cada una de tus paradas en un lugar determinado. Una vez hecho, comprueba que todos los vértices tienen grado par.

2. La siguiente imagen es un esquema de un mapa de líneas de RENFE de largo recorrido.



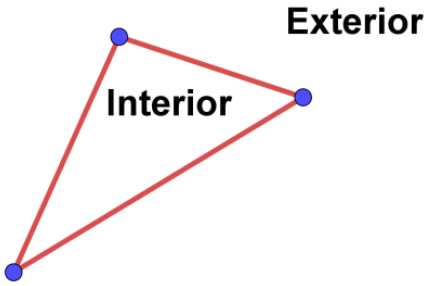
a) Elige 8 estaciones conectadas entre sí de forma que puedas salir y volver a una de ellas pasando por todas las demás, sin repetir nunca un tramo de recorrido. (Paseo con retorno.)

b) Elige 8 estaciones conectadas entre sí de forma que puedas salir de una y acabar en otra distinta después de pasar por todas las demás, sin repetir nunca un tramo de recorrido. (Paseo sin retorno.)

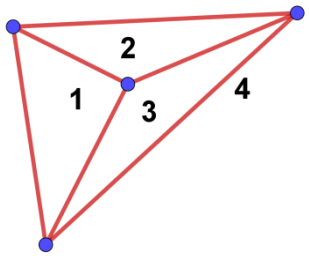
c) Elige 8 estaciones conectadas entre sí de forma que desde ninguna de ellas se pueda realizar todo el recorrido sin repetir, forzosamente, alguno de los tramos ya recorridos. (Paseo imposible.)

Actividad 4. Contando regiones

Observa que a veces un grafo divide el plano en dos partes: “interior” y “exterior”:



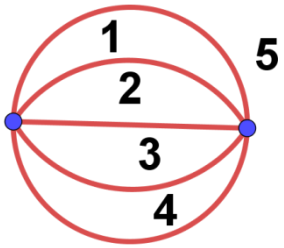
O sea, en dos regiones. Pero puede que a su vez el interior se divida en otras:



Lo que queremos investigar es si hay relación entre el número de vértices, el de aristas y el de regiones de un paseo. Para ello, veamos primero el caso más simple:

Contemos: 1 región (la exterior que rodea el segmento), 2 vértices y 1 arista.

Si ahora añadimos más aristas que conecten los dos vértices, por cada nueva arista que añadimos, aumentamos una región. Por ejemplo, si añadimos cuatro aristas más, queda:



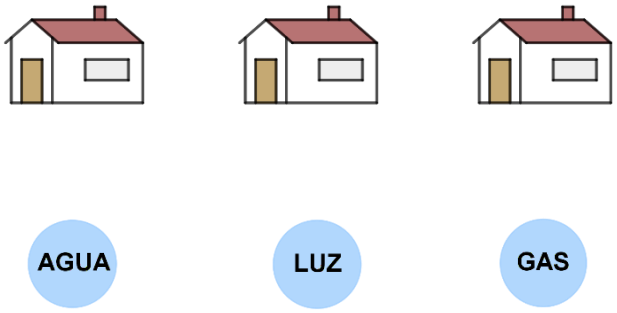
Contemos: 5 regiones, 2 vértices y 5 aristas. Parecer ser, entonces que:

caras + vértices = aristas + 2

Si ahora conectamos un nuevo vértice al grafo, como debemos añadir una nueva arista para hacer la conexión, la relación anterior se debe de conservar. En el caso de que conectemos el nuevo punto con dos nuevas aristas, además del vértice estamos añadiendo una nueva región, por lo que tampoco se altera la relación.

Comprueba si la relación se cumple para todos los ejemplos a, b, c, d, e, f, g de las actividades 2 y 3.

Ampliación de la actividad 4. Agua, Luz y Gas



Objetivo: Conectar 3 casas con 3 fuentes de suministros (agua, luz, gas), sin que las conexiones se entrecrucen. ¿Es posible?

Dicho de otra forma, ¿será posible unir 3 vértices con cada uno de otros 3 mediante líneas que no se corten?

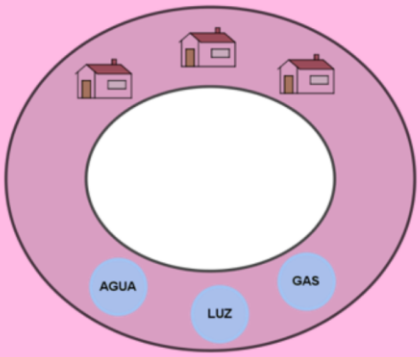
Para solucionarlo, suponte que ya hubieses logrado tu objetivo. Entonces tendrías un grafo con 6 vértices y 9 aristas. Según esto, deberíamos tener 5 regiones. Vamos a demostrar que eso no puede ser.

Fíjate en primer lugar que cada región necesita un mínimo de 4 líneas que la delimiten (si solo hubiese 3, significaría que una de las aristas une dos casas o dos fuentes, lo que no entra en la propuesta del problema). Como hay 5 regiones, habría un total de 20 aristas, pero así estamos contando cada arista dos veces (una arista es frontera entre dos regiones), o sea que habrá la mitad, 10 aristas. Y ya vimos que solo teníamos 9.

Conclusión: el trazado es imposible en el plano.

Resulta que la relación "regiones + vértices = aristas + 2" también se cumple sobre la esfera, por lo que en la Tierra no es posible encontrar una solución al problema.

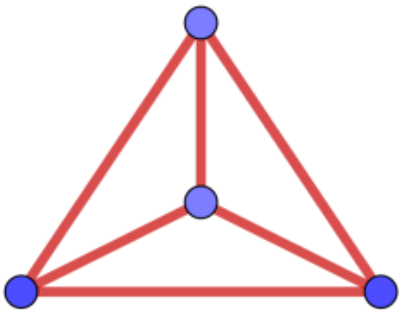
Sin embargo, si la Tierra tuviese forma de rosquilla (en ambientes sofisticados le llaman toro a una cosa con forma de donut), sí se puede resolver el problema. No es difícil, así que si encuentras a mano algo que se parezca a una rosquilla puedes intentarlo:



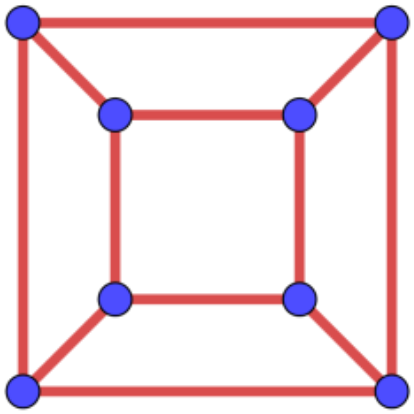
MARZO,
MES DE LAS
MATEMÁTICAS

Actividad 5. Poliedros

¿Te has fijado que el ejemplo “a” (de la actividad 2) parece, visto en perspectiva, un tetraedro, o sea, una pirámide de base triangular?



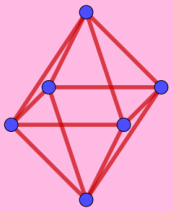
El dibujo siguiente, ¿que representará: un grafo con 6 regiones, 8 vértices y 12 aristas o bien será un cubo visto en perspectiva, con sus 6 caras, 8 vértices y 12 aristas?



Ya que no parece haber diferencia, ¿se cumplirá la siguiente relación?

regiones + vértices = aristas + 2

Ahora imagina que el dibujo anteriores el "esqueleto" de un cubo. ¿Podrás dibujar el esqueleto de una pirámide de base cuadrada (como las egipcias)?
Imagina una hormiga situada en un vértice de un cubo que cuelga del techo. Las caras del cubo son muy resbaladizas, así que la hormiga solo puede caminar por las aristas. ¿Podrá recorrer todas las aristas sin pasar dos veces por la misma?
¿Y si en vez de en un cubo, la hormiga estuviese en un octaedro (que es como dos pirámides egipcias pegadas por la base cuadrada)?

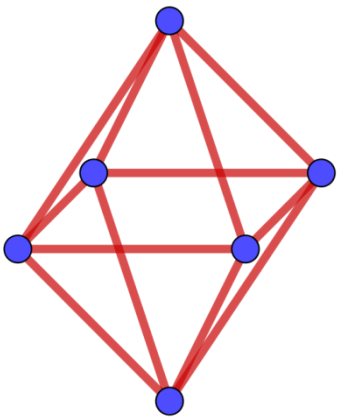


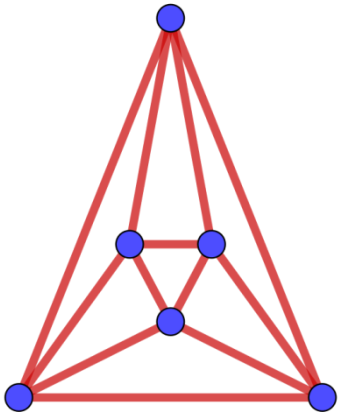
Actividad de ampliación. Transformaciones topológicas

La hormiga sí puede recorrer todas las aristas del octaedro, ya que el grado de todos sus vértices es par, lo que significa además que al final del recorrido volverá al vértice de partida (paseo con retorno).

Una pregunta que podemos hacernos, sin embargo, es: ¿y de cuántas formas puede hacer el recorrido? La solución no es sencilla de hallar: ¡nada menos que de 1488 formas!

Sin embargo, aunque la labor sigue siendo difícil, los matemáticos idearon un sistema para facilitarla. Consiste en transformar el grafo del octaedro en otro equivalente, es decir, con igual número de vértices y aristas que inciden en cada vértice, de tal forma que no se corten dos aristas (grafo plano). Ya sabes que la "forma" del grafo no importa, lo que importa es su "estructura". Así, podemos redibujar el grafo del octaedro de la siguiente forma:





Comprueba que los dos grafos son equivalentes comparando el número de vértices, el número de aristas y el grado de cada vértice. Observa también que el segundo grafo parece tener una cara (o región) menos (7 en vez de 8), pero no es así, ya que también cuenta la "región exterior".

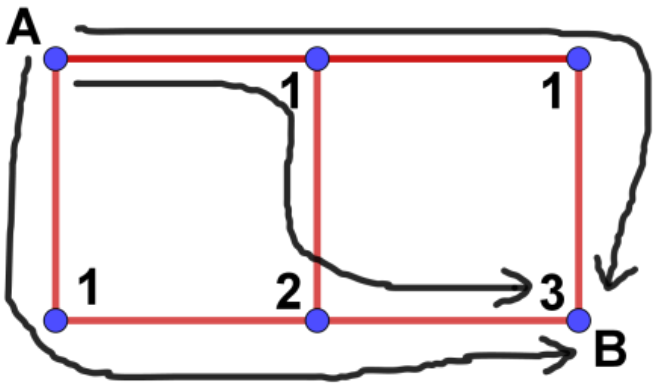
Trata de construir, de igual forma (sin que las aristas se corten), el esqueleto de un dodecaedro (poliedro con doce caras pentagonales).

Puedes saber cuántas aristas tiene, teniendo en cuenta que cada cara tiene 5 aristas, lo que suman 12 x 5 = 60. Pero como cada arista es contada dos veces (pertenece a dos caras) habrá solo 30 aristas.

Por la relación de Euler (se pronuncia "Oiler" y fue el matemático que descubrió que en cualquier poliedro se cumple que "caras + vértices = aristas + 2"), deduces que el número de vértices es 20. Lo que quiere decir que en cada vértice inciden 3 aristas (el grado de cada vértice es 3).

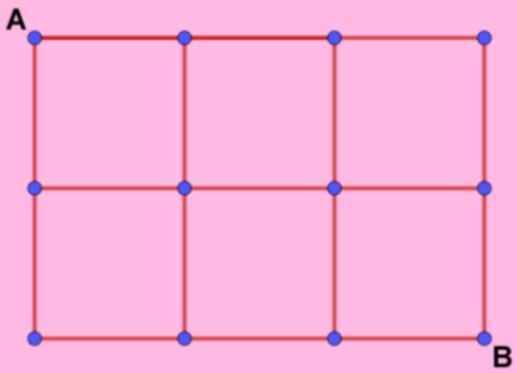
Actividad 6. Paseos de cobaya

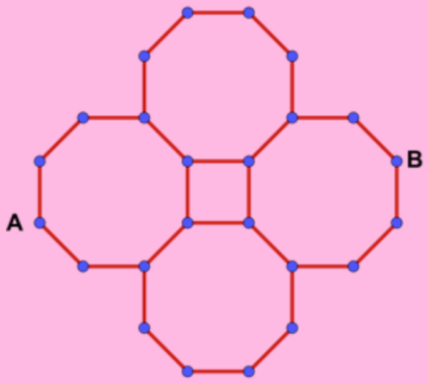
Muchas veces no nos interesa recorrer todo el grafo, si no simplemente trasladarnos de un vértice a otro recorriendo la mínima distancia. Esto lo aprenden rápidamente las cobayas de laboratorio cuando se enfrentan a un laberinto. Puede que existan varios caminos de mínimo recorrido. Por ejemplo para ir de A a B en el siguiente grafo:

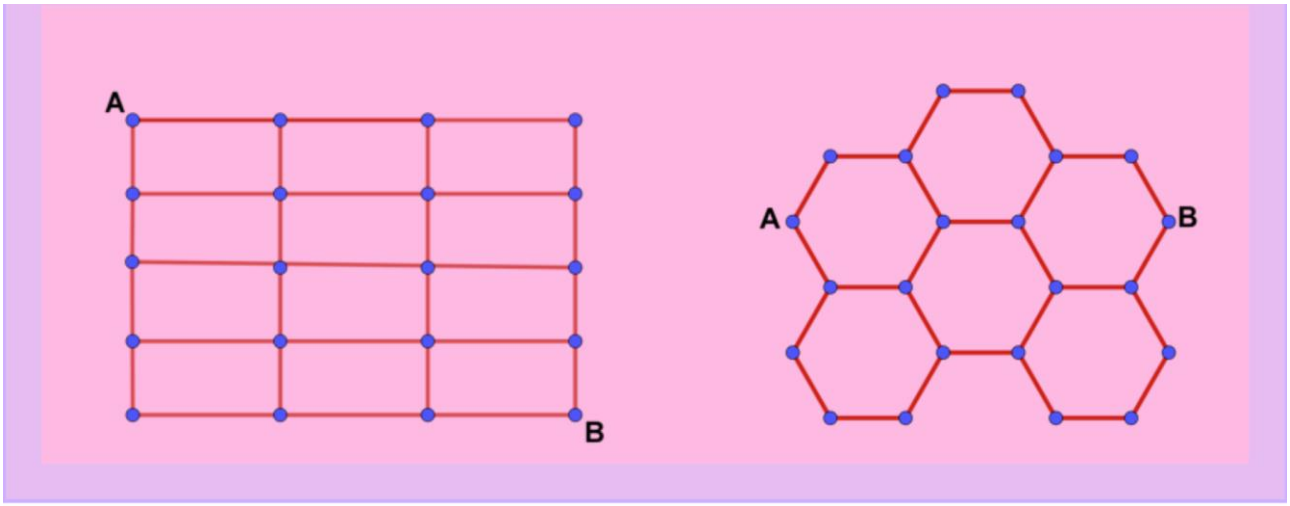


una cobaya puede elegir entre tres caminos de mínimo recorrido (cada número en los vértices indica cuántos caminos de mínimo recorrido llegan desde A hasta él).

Cuenta cuántos caminos de mínimo recorrido puede elegir una cobaya que vaya desde A hasta B en los siguientes grafos:





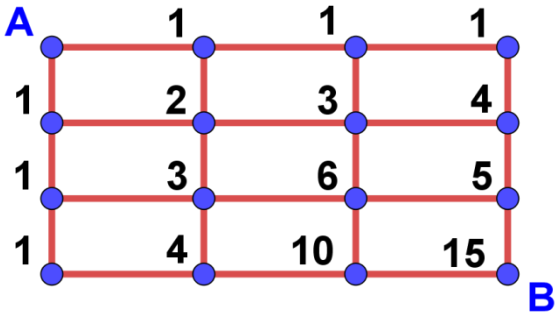


Complemento a la actividad 6. El triángulo de Tartaglia

Nicoló Fontana nació en Brescia en las postrimerías del siglo XV o a primeros del XVI. Murió en Venecia en 1557, ciudad donde venía enseñando matemática desde 1530, con alguna corta ausencia. Tartaglia (se pronuncia "Tartalla") es el apodo que recibió al haber quedado disminuido en el habla por una herida sufrida en la boca. Es famoso, sobre todo, por el triángulo de números que lleva su nombre, y cuyo desarrollo es:

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
.....

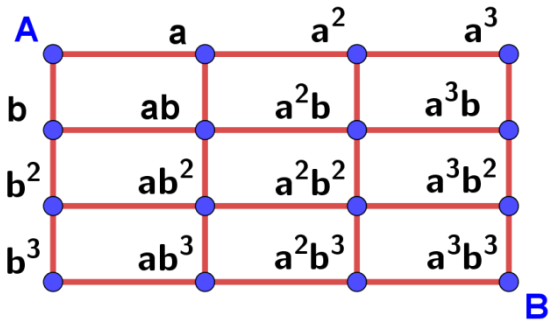
Compáralo con el número de caminos de recorrido mínimo que van desde A hasta cualquiera de los vértices en el grafo:



Los mismos números (llamados números combinatorios) vuelven a aparecer cuando hallamos las potencias de (a+b):

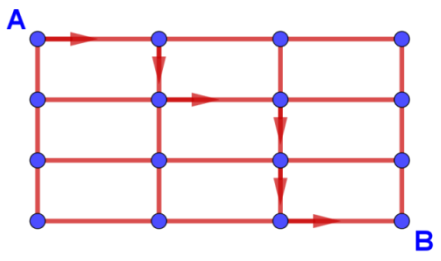
$$(a+b)^2 = a^2 + \mathbf{2}ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + \mathbf{3}a^2b + \mathbf{3}ab^2 + b^3$$
$$(a+b)^4 = a^4 + \mathbf{4}a^3b + \mathbf{6}a^2b^2 + \mathbf{4}ab^3 + b^4$$
$$(a+b)^5 = a^5 + \mathbf{5}a^4b + \mathbf{10}a^3b^2 + \mathbf{10}a^2b^3 + \mathbf{5}ab^4 + b^5$$

Observa que cuando se multiplica (a+b)(a+b), se puede obtener a·b por dos caminos diferentes: a·b y b·a. Si construyes un grafo en que cada arista horizontal multiplique por a y cada arista vertical multiplique por b, tendremos la relación entre el triángulo de Tartaglia y las potencias de un binomio.

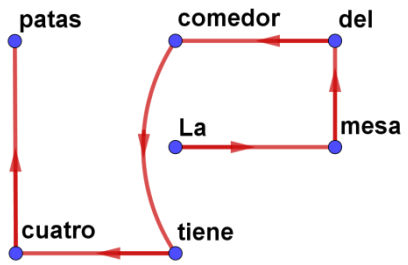


Actividad 7. Tomando decisiones

Observa que cada vez que la cobaya llega a un cruce (vértice) del laberinto (grafo) debe tomar una decisión sobre por donde va a continuar. Esa decisión la podemos señalar con una flecha. Por ejemplo, una cobaya ha tomado las siguientes decisiones para ir de A a B:



La toma de decisiones es fundamental en todas las actividades. Todavía más fundamental en los últimos años, en donde el avance de los ordenadores, que ya pueden realizar operaciones muy complejas, está basado en el estudio de cómo enseñarle a tomar decisiones. Por ejemplo, nosotros mismos al hablar "elegimos" las palabras y las colocamos en el "orden" adecuado:



Como este grafo tiene flechas, es decir, un sentido, se le llama grafo dirigido.

Construye los grafos dirigidos correspondientes a los siguientes ejemplos:

a) Vértices: "América", "Colón", "1492","en", "descubrió".
Decisión: "normas lingüísticas".

b) Vértices: "2", "3","5"
Decisión: "suma matemática".

c) (2 + 6) x 3 = 24

d) 2 x 3 + 6 x 3 = 24

e) Vértices: Tú, tus hermanos, tus padres, tus abuelos, tus tíos.
Decisión: horizontal:"hermano de" vertical: "padre de"

f) Vértices: "nube", "mar", "sol", "lluvia", "ríos"
Decisión: "leyes físicas, ciclo del agua"

g) Vértices: "rana", "oveja", "abeja", "lobo", "flor","hierba", "hombre", "mosca", "fruta"
Decisión: "poder comer a".

Actividad 8. Árboles

Observa que el ejemplo “e” de la actividad 7 representa las primeras “ramas” de tu árbol genealógico. Se llama así, “árbol”, porque es un grafo que se ramifica como un árbol. También habrás oído que se suelen llamar “ramas” a las distintas especialidades de una materia. Por ejemplo, “la rama de geología”, o bien, “la rama de estadística”. Esto sucede porque las distintas carreras universitarias se clasifican formando un árbol.

En Matemáticas, un árbol es un grafo donde solo hay un camino entre cada par de vértices.

Busca árboles en tus propios conocimientos. Si buscas bien, encontrarás muchos. Por ejemplo, en Historia abundan los árboles genealógicos, de sucesión de poder, etc. En Matemáticas, los árboles de procedimientos para realizar operaciones (algoritmos). En Ciencias Naturales, los que clasifican las especies. En Lengua, los que estructuran la sintaxis (la colocación de las palabras). Observa, además, que el propio índice de todos los libros de texto es un árbol que clasifica los contenidos.

Los árboles son muy útiles no solo porque la relación entre los distintos vértices aparece muy clara, si no porque además nos permite contar rápidamente todas las ramas o parte de ellas. Si un árbol tiene 5 ramas, cada una con 7 ramitas y cada ramita con 10 hojas (subramitas), el árbol tendrá 5 x 7 = 35 ramitas y 5 x 7 x 10 = 350 hojas.

Resuelve los siguientes problemas a partir del árbol correspondiente:

1) Diez equipos de fútbol deciden hacer una liga entre ellos. ¿Cuántos partidos se habrán de jugar?

2) En una carrera de caballos se hacen boletos de apuestas sobre cuáles se clasifican en el primer, segundo y tercer puesto. El que acierte los tres, lleva premio. Si corren 5 caballos, ¿cuántos boletos habrá que cubrir para estar seguros de que uno de ellos será el premiado? (Se descarta la posibilidad de empates).

3) Un chico tiene 6 camisas, 4 pantalones y 3 pares de zapatillas. ¿Entre cuántas indumentarias distintas puede escoger?
4) ¿Cuántos números distintos, de 3 cifras, se pueden formar con las cifras impares?
5) ¿Cuántos números distintos, de 3 cifras, se pueden formar con las cifras impares, sin repetir ninguna cifra?
6) Las quinielas consisten en pronosticar los resultados de 15 partidos indicando 1 si gana el equipo local, X si hay empate y 2 si se cree que ganará el equipo de fuera. ¿Cuántas quinielas distintas pueden hacerse en una misma jornada?
7) Un cuadrado, con sus diagonales, se compone de 6 aristas. ¿Cuántas aristas tendrá un pentágono con sus diagonales? ¿Y un polígono de 20 lados con sus diagonales?

Complemento a la actividad 8. Ideas para contar

Contar objetos, figuras, cifras, suele entenderse como una actividad rutinaria y de pura paciencia. En muchos casos, sin embargo, un golpe de inspiración (es decir, un nuevo enfoque) puede ahorrarnos buena parte del esfuerzo.

LA PRESENCIA DEL SIETE

¿En cuántos números enteros entre el 0 y el 999 aparece la cifra 7?

El problema tiene, evidentemente, una única solución, pero son diversos los métodos para llegar a ella, como casi siempre. Te proponemos que trates de resolverlo por tu cuenta antes de continuar leyendo.
Un método "bruto"consiste en hacer una lista con los mil números y contar allí los que incluyen la cifra 7. Igualmente brutal, pero con menos trabajo humano, es servirse de un ordenador para efectuar el listado y el recuento que se pide. La cuenta puede aliviarse tomando en consideración ciertos atajos; por ejemplo, que en cada decena hay un número con la cifra 7, aunque luego aparecen ciertas complicaciones con la decena de los 70 y la centena de los 700.

Aquí te proponemos un ataque diametralmente opuesto. Podríamos decir que abordamos el problema por su otro flanco. Empezamos por averiguar cuántos son los números que no incluyen la cifra 7. La ventaja es que tal cuestión se responde con facilidad, pues disponemos ahora de nueve cifras (del 0 al 9, sin el 7) cada una de las cuales puede ir cualquiera de las posiciones (centenas, decenas, unidades). Por tanto, habrá 9x9x9= 729 números. En consecuencia, los que incluyen al 7 son 1000 menos 729; o sea, 271.

TODOS LOS SIETES

¿Cuántas veces figura el 7 en los números enteros entre el 0 y el 999?

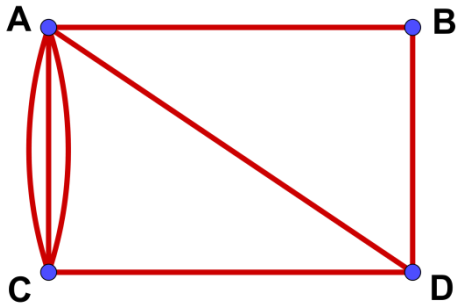
La diferencia con respecto a nuestro primer problema es que aquí estamos preguntando por la cantidad de apariciones de la cifra 7. Un número como el 377, por ejemplo, aporta dos sietes.
El método que te proponemos en este caso no es el del ataque por el flanco opuesto, sino el bombardeo del propio centro del problema. Nos preguntamos por la cantidad total de caracteres que entran en juego (incluido el 7, y las demás cifras, con todas sus repeticiones).
Al tener mil números de tres cifras cada uno, habrá tres mil cifras en danza. Como todas las cifras participan por partes iguales, habremos de tener tres mil dividido por diez, o sea, 300 apariciones del 7.

Actividad 9. Tablas

Ocurre a veces que un grafo es difícil de manejar, sobre todo si es muy grande. En cambio, los números son, incluso en grandes cantidades, fáciles de manejar (ahora que existen calculadoras y ordenadores) y, sobre todo, susceptibles de someterse a un montón de operaciones (como sumar, multiplicar, etc.).

Por esto es importante disponer de un procedimiento que recoja la mayor información posible de un grafo y la convierta en números.

La idea consiste en contar cuántas aristas van desde un vértice hasta otro y recoger los resultados en una tabla (matriz):



→	A	B	C	D
A	**0**	**1**	**3**	**1**
B	**1**	**0**	**0**	**1**
C	**3**	**0**	**0**	**1**
D	**1**	**1**	**1**	**0**

A esta tabla se le conoce por matriz de adyacencia del grafo.

1) Halla el grado de cada vértice de los grafos (sin dibujar el grafo) cuya matriz de adyacencia es:

→	A	B	C	D
A	**0**	**1**	**1**	**1**
B	**1**	**0**	**1**	**1**
C	**1**	**1**	**0**	**0**
D	**1**	**1**	**0**	**0**

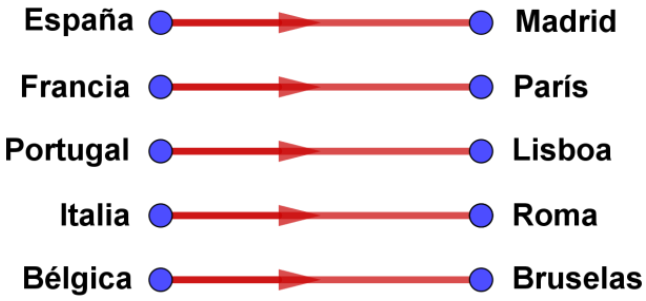
2) ¿La matriz anterior corresponde a un paseo con retorno, sin retorno o imposible?

3) Construye ahora el grafo correspondiente a esa matriz y comprueba tus resultados de 1) y 2).

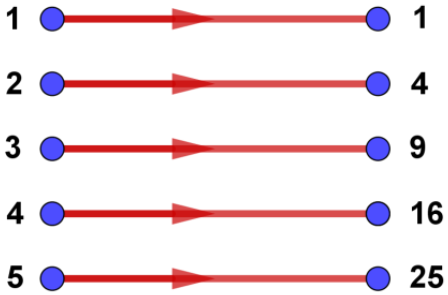
4) Construye la matrizcorrespondiente a los vértices y aristas de un cubo.

Actividad 10. Funciones

Un caso particular, pero importante, de grafo es el emparejamiento de listas. Una serie de vértices conectan con otra serie de vértices, de modo único (a un vértice de la primera serie se le hace corresponder solo uno de la segunda). Por ejemplo:



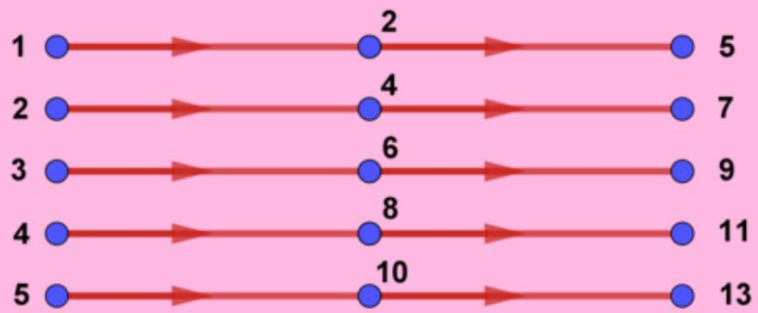
O bien:



Este tipo de grafo numérico es fácil de manejar a través del álgebra, pues esta poderosa herramienta lo transforma en un grafo de solo dos vértices, que abarca todos los anteriores:

A este tipo de grafo le llamamos función.

¿Qué función representa el siguiente grafo?



Autor
Rafael Losada Liste

Con colaboración de: